

Bab 4: Aljabar Boolean dan Peminimuman Persamaan

Pada akhir bab ini, pelajar dapat:

- mengetahui teorem dan peraturan Aljabar Boolean
- menggunakan teorem dan peraturan tersebut untuk mendapatkan persamaan SOP dan POS piawai
- memisahkan pelengkap(complement) dari sebutan panjang atau persamaan
- meminimumkan persamaan menggunakan kaedah Aljabar Boolean
- memahami konsep dan teknik peta Karnaugh
- meminimumkan persamaan melalui kaedah pemetaan Karnaugh
- menggunakan sebutan tak-hirau untuk meminimumkan persamaan

4.1 Teorem Fundamental Aljabar Boolean

Jadual 4.1 di bawah menunjukkan teorem asas Aljabar Boolean yang akan digunakan untuk mengolah dan meminimumkan persamaan.

Logik DAN	Logik ATAU
$A + 0 = A$	$A \cdot 0 = 0$
$A + 1 = 1$	$A \cdot 1 = A$
$A + A = A$	$A \cdot A = A$
$A + \overline{A} = 1$	$A \cdot \overline{A} = 0$

Jadual 4.1 Teorem fundamental Aljabar Boolean

Selain dari teorem di atas, tiga peraturan asas Boole dinyatakan dalam Jadual 4.2. Dua peraturan yang pertama untuk setiap logik menunjukkan bahawa persamaan di sebelah kiri adalah sama dengan persamaan di sebelah kanan walaupun tertib operasi logiknya berbeza. Manakala persamaan ketiga menunjukkan bagaimana sesuatu persamaan boleh dipanjangkan atau difaktorkan.

Logik DAN	Logik ATAU
$A + B = B + A$	$A \cdot B = B \cdot A$
$(A + B) + C = A + (B + C)$	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
$A(B + C) = AB + AC$	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$

Jadual 4.2 Peraturan asas Aljabar Boolean

Dari teorem dan peraturan di atas, beberapa peraturan lain yang tidak kurang pentingnya dapat dihasilkan. Peraturan ini diberi dalam contoh di bawah untuk dibuktikan. Pembuktian boleh dibuat melalui dua cara. Pertama, secara Aljabar Boolean, iaitu menggunakan teorem-teorem dan peraturan-peraturan Boole yang dinyatakan di atas. Kedua, pembuktian secara jadual kebenaran. Sekiranya hasil output persamaan pada sebelah kiri adalah sama dengan hasil output persamaan pada sebelah kanan, maka peraturan tersebut dapat dibuktikan kesahihannya.

Contoh: Buktikan pernyataan-pernyataan berikut menggunakan Aljabar Boolean atau jadual kebenaran.

- a) $X + XY = X + Y$ b) $X(X + Y) = XY$
 c) $\overline{A + AB} = A + B$ d) $\overline{A(\overline{A + B})} = AB$

Satu lagi teorem penting dalam Aljabar Boolean ialah teorem De Morgan seperti yang ditunjukkan di bawah. Teorem ini menyatakan cara untuk memisahkan pelengkap pada sebutan panjang, iaitu sebutan yang mempunyai lebih dari satu pembolehubah. Dengan erti kata lain, teorem ini menghapuskan “pelengkap sebutan” dengan menyonsangkan setiap pembolehubah dan operator dalam sebutan tersebut.

$$\overline{A + B} = \overline{A} \overline{B} \qquad \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

(Teorem De Morgan)

Latihan: Guna teorem De Morgan untuk memisahkan pelengkap pada sebutan.

- a) $Y = \overline{\overline{AB} + \overline{CDE}}$ b) $Y = \overline{(A + C)(\overline{BD} + E)}$
 c) $P = \overline{\overline{X + Y(W + Z)}}$ d) $P = \overline{\overline{WX(V + Y + Z)}}$
 e) $F = \overline{A + \overline{C(BD + E)}}$ f) $F = \overline{(V + \overline{WZ})(\overline{XY} + \overline{V + W})}$
 g) $Z = \overline{\overline{\overline{P} + R(\overline{QTU} + S)}}$ h) $Q = \overline{(A + B + C)(\overline{AD} + \overline{B})}$

4.2 Pembentukan Persamaan SOP dan POS Piawai

Anda telah pelajari dari Bab 3 cara untuk menulis persamaan SOP dan POS piawai sekiranya diberi jadual kebenaran. Anda juga telah pelajari cara untuk menulis persamaan Boolean sekiranya diberi gambarajah logik gabungan. Tetapi persamaan Boolean tersebut tidak semestinya dalam bentuk piawai. Oleh itu, teknik pembentukan persamaan piawai daripada persamaan biasa perlu diketahui. Ada tiga cara untuk melakukannya, iaitu melalui:

a) *Jadual kebenaran*

Jadual kebenaran dibina untuk mendapatkan output. Output ‘1’ boleh diwakilkan dengan persamaan SOP piawai manakala output ‘0’ diwakilkan dengan persamaan POS piawai.

Contoh: Dapatkan persamaan SOP dan POS piawai daripada $F = \overline{(A + B)} + \overline{(B + C)}$ dengan membina jadual kebenaran.

b) Penyenaian nombor perpuluhan

Pertama sekali, pastikan tiada “pelengkap sebutan” dalam persamaan. Sekiranya wujud pelengkap tersebut, hapuskannya dengan menggunakan teorem De Morgan. Setelah itu, tukarkan persamaan tersebut ke bentuk persamaan biasa, sama ada dalam bentuk SOP atau POS. Teknik pemanjangan (expansion) digunakan untuk mendapatkan persamaan SOP biasa manakala teknik pemfaktoran digunakan untuk mendapatkan persamaan POS biasa. Seterusnya, pada setiap sebutan (sama ada sebutan tambah atau sebutan produk), dapatkan semua kombinasi input yang mungkin. Tuliskan nilai perpuluhan yang diwakili oleh kombinasi input tersebut dalam bentuk notasi sebelum ditukar ke bentuk piawai.

Contoh:

a) Tulis semula $Y = \overline{(A+C)(A+BC)}$ dalam bentuk persamaan SOP piawai.

b) Dapatkan persamaan POS piawai untuk fungsi $F = \overline{(Q+PR)(PRS)}$

c) Aljabar Boolean

Kaedahnya hampir sama dengan penyenaian nombor perpuluhan. Persamaan tersebut harus ditukar terlebih dulu ke bentuk biasa menggunakan teknik pemanjangan atau pemfaktoran. Setiap sebutan produk dalam persamaan SOP biasa hendaklah ditukar ke sebutan minimum (minterm) dengan memperkenalkan pembolehubah yang hilang (missing variable). Sebagai contoh:

$$f(x, y, z) = \overline{xy} + \overline{yz} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{sebutan } \overline{xy} \text{ tidak mempunyai pembolehubah 'z'} \\ \text{sebutan } \overline{yz} \text{ tidak mempunyai pembolehubah 'x'} \end{array}$$

Darabkan sebutan produk dengan nilai “1” dan gantikan nilai “1” tersebut dengan “hasil tambah pembolehubah yang hilang dan pelengkapanya”. Akhir sekali, panjangkan persamaan untuk mendapatkan persamaan SOP piawai. Semak jawapan akhir untuk memastikan sebutan minimum yang sama tidak ditulis dua kali.

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \overline{xy}(1) + \overline{yz}(1) \\ &= \overline{xy}(z + \overline{z}) + \overline{yz}(x + \overline{x}) && \text{(Teorem } A + \overline{A} = 1 \text{ digunakan di sini)} \\ &= \overline{xyz} + \overline{xy\overline{z}} + \overline{xyz} + \overline{\overline{y}xz} \\ &= \overline{xyz} + \overline{xy\overline{z}} + \overline{\overline{y}xz} \end{aligned}$$

Manakala, untuk mendapatkan persamaan POS piawai pula, sebutan tambah hendaklah ditukar ke sebutan maksimum (maxterm) dengan menambah nilai “0” pada sebutan tersebut. Nilai “0” itu kemudiannya digantikan oleh “hasil darab pembolehubah yang hilang dan pelengkapanya”. Seterusnya, faktorkan persamaan dan semak jawapan supaya sebutan maksimum tidak diulang dua kali. Lihat contoh berikut.

$$\begin{aligned}
f(a,b,c) &= (a+\bar{c})(\bar{b}+c) \\
&= (a+\bar{c}+0)(\bar{b}+c+0) \\
&= (a+\bar{c}+b\bar{b})(\bar{b}+c+a\bar{a}) \\
&= (a+\bar{c}+b)(a+\bar{c}+\bar{b})(\bar{b}+c+a)(\bar{b}+c+\bar{a})
\end{aligned}$$

Latihan:

- a) Carikan persamaan SOP piawai untuk fungsi $f(w, x, y, z) = x\bar{y} + w(x\bar{z} + y\bar{z})$
- b) Tuliskan persamaan $P(a,b,c,d) = c + \bar{a}\bar{b}d$ dalam bentuk POS piawai.

4.3 Peminimuman Persamaan Menggunakan Aljabar Boolean

Persamaan piawai mempunyai terlalu banyak sebutan. Oleh itu, persamaan perlu diringkaskan ke bentuk yang termudah. Ini boleh dilakukan dengan mengurangkan bilangan pembolehubah dan sebutan. Peminimuman persamaan adalah penting untuk mengurangkan penggunaan get logik dan seterusnya menjimatkan kos. Kaedah pertama yang boleh digunakan untuk meminimumkan persamaan adalah dengan menggunakan teorem-teorem dan peraturan-peraturan dalam Aljabar Boolean.

Ada tiga perkara yang perlu diperhatikan untuk memudahkan persamaan, iaitu:

- a) *pelengkap sebutan*
Anda boleh guna teorem De Morgan untuk hapuskan pelengkap sebutan sebelum memudahkan persamaan **ATAU** anda boleh permudahkan dulu persamaan di bawah pelengkap itu, kemudian baru guna teorem De Morgan.
- b) *sebutan-sebutan yang mempunyai literal yang sama (common literal)*
Keluarkan/Faktorkan literal tersebut dan guna teorem $A+1=1$ atau $A+\bar{A}=1$.

Contoh:

$$\begin{aligned}
ac + \bar{a}\bar{b}c + abc &= ac(1+\bar{b}) + \bar{a}\bar{b}c \\
&= ac + \bar{a}\bar{b}c \\
&= a(c + \bar{b}c)
\end{aligned}$$

- c) *satu sebutan mempunyai pembolehubah dan satu sebutan lagi mempunyai pelengkapnya*, dengan syarat salah satu sebutan tersebut hanya terdiri daripada satu pembolehubah sahaja.

Guna peraturan $A+BC = (A+B)(A+C)$ dan teorem $A+\bar{A}=1$

Contoh: (sambungan dari atas)

$$\begin{aligned}
a(c + \bar{b}c) &= a(c+b)(c+\bar{c}) \\
&= a(c+b)
\end{aligned}$$

Latihan: Permudahkan persamaan-persamaan berikut.

a) $P = S + QS + Q\bar{R}S$

b) $Y = \overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{ABC} + ABC$

c) $Y = \overline{AB} + AC + \overline{ABC} + ABC$

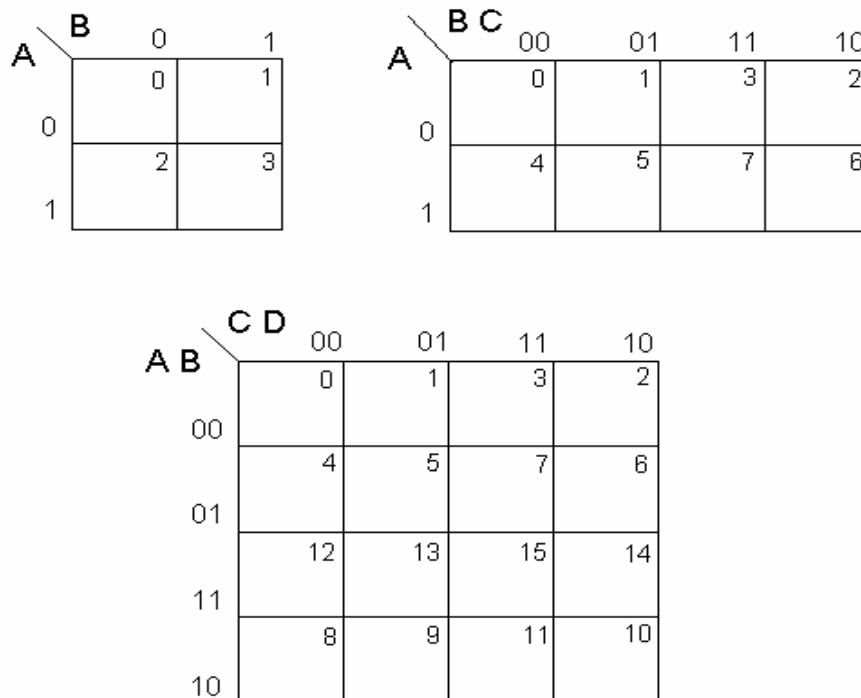
d) $F = (\overline{AB}(C + BD) + \overline{AB})D$

e) $F = \overline{XY} + XZ + \overline{XYZ}$

f) $Q = (x + \bar{w})(\overline{xy + wz})$

4.4 Peminimuman Persamaan Menggunakan Peta Karnaugh

Peta Karnaugh boleh dikatakan sebagai bentuk alternatif kepada jadual kebenaran. Setiap kombinasi input dalam jadual kebenaran diwakili oleh sel dalam peta Karnaugh. Oleh itu, setiap sel juga mempunyai sebutan minimum dan sebutan maksimum bergantung pada output. Rajah 4.1 menunjukkan peta Karnaugh 2 input, 3 input dan 4 input pembolehubah. Nombor perpuluhan pada setiap sel menunjukkan kombinasi input dalam jadual kebenaran. Nombor ini dikenali sebagai nombor sel. Sel-sel pula disusun supaya sel yang bersebelahan hanya mengalami perubahan satu pembolehubah sahaja.



Jadual 4.2 Peta Karnaugh 2, 3 dan 4 input

Cara membuat pemetaan:

- Tentukan bilangan input atau pembolehubah dalam persamaan.
- Lukis peta Karnaugh bersama dengan nombor sel, koordinat jalur dan baris.
- Jika persamaan berbentuk SOP, wakilkan output '1' pada sel-sel yang berkenaan (sebutan minimum). Jika persamaan berbentuk POS, wakilkan output '0' pada sel-sel yang berkenaan (sebutan maksimum).

Latihan: Plotkan fungsi berikut ke peta Karnaugh.

a)

x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

b) $f(p, q, r, s) = \overline{p}q + q\overline{r}s + \overline{p}qs$

Untuk mendapatkan persamaan termudah dalam bentuk SOP, semua output '1' mesti dikumpulkan manakala untuk mendapatkan persamaan termudah dalam bentuk POS, semua output '0' dikumpulkan. Persamaan paling minimum akan tercapai apabila **saiz kumpulan adalah maksimum** dan **bilangan kumpulan adalah minimum**. Beberapa peraturan mesti dipatuhi semasa mengumpul output. Antaranya:

- Hanya sel-sel yang bersebelahan sahaja boleh dikumpulkan dalam satu kumpulan.
- Kumpulan mesti bersaiz 16 sel, 8 sel, 4 sel, 2 sel dan 1 sel. (Saiz yang lain adalah tidak dibenarkan.)
- Keutamaan mesti diberi kepada saiz terbesar, bermaksud saiz yang terbesar mesti dikumpulkan dahulu (kecuali dalam beberapa kes di mana bilangan kumpulan boleh dikurangkan)
- Pertindihan antara kumpulan adalah dibenarkan dengan syarat pertindihan dibuat dengan tujuan untuk mengumpul output yang belum lagi dikumpul.
- Kumpulan mestilah berbentuk "segiempat". Bentuk-bentuk lain tidak dibenarkan.

Selepas mengumpul semua output, sama ada '1' atau '0', semak semula kumpulan yang telah anda bentuk. Pastikan setiap kumpulan bersaiz maksimum. Jika ada kumpulan boleh dibesarkan saiznya, maka jawapan belum dalam bentuk paling ringkas. Pastikan juga sama ada terdapat lebih kumpulan, iaitu kumpulan di mana semua outputnya telah dikumpulkan oleh kumpulan lain. Kumpulan ini patut diabaikan.

Setiap kumpulan, tak kira saiz boleh diwakilkan oleh satu sebutan. Kumpulan output '1' diwakilkan oleh sebutan produk (product term) manakala kumpulan output '0' diwakilkan oleh sebutan tambah (sum term). Kemudian, sebutan-sebutan ini ditambahkan – SOP, atau didarabkan - POS. Bagaimana pula hendak membaca sebutan dari sesuatu kumpulan? Tuliskan sebutan minimum atau maksimum pada setiap sel dalam kumpulan tersebut. Literal yang sama pada setiap sel (common literal) akan menjadi sebutan kepada kumpulan tersebut.

4.5 Fungsi Tak Lengkap (Incomplete Functions)

Dalam sistem digital, sesetengah kombinasi input tidak mungkin berlaku atau tidak dibenarkan. Oleh itu, output yang terhasil pada kombinasi input ini boleh diabaikan. Dalam erti kata lain, output '1' atau '0' pada kombinasi tersebut tidak dihiraukan dan boleh diwakilkan dengan simbol "X" atau "D" yang bermaksud "tak-hirau" (don't-cares). Contoh di bawah menunjukkan bagaimana persamaan SOP dan POS ditulis dari jadual kebenaran yang mempunyai tak-hirau. Fungsi yang mempunyai sebutan tak-hirau dipanggil sebagai fungsi tak lengkap.

Contoh:

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	X
0	1	1	X
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	X
1	1	1	1

$$F(x, y, z) = \overline{x} \overline{y} z + x \overline{y} z + xyz \quad (\text{SOP piawai})$$
$$F(x, y, z) = \sum m(1, 5, 7) + d(2, 3, 6) \quad (\text{notasi-m})$$

$$F(x, y, z) = (x + y + z) \overline{(x + y + z)} \quad (\text{POS piawai})$$
$$F(x, y, z) = \prod M(0, 4) + d(2, 3, 6) \quad (\text{notasi-M})$$

Dalam peta Karnaugh, tak-hirau boleh dikumpulkan bersama-sama dengan output dalam kumpulan. Tujuannya adalah untuk membesarkan lagi saiz kumpulan supaya persamaan yang paling minimum dapat dihasilkan. Namun, matlamat utama masih kekal, iaitu untuk mengumpul semua output '1' atau semua output '0', dan bukannya mengumpul semua output tak-hirau. Sekiranya, tak hirau tidak dapat membantu untuk membesarkan saiz kumpulan, maka tak-hirau tersebut tidak perlu dikumpul sekali.

Latihan peminimuman persamaan menggunakan peta Karnaugh diberi pada helaian yang lain.

